航空機の運動方程式

1. 舵面と操縦系統

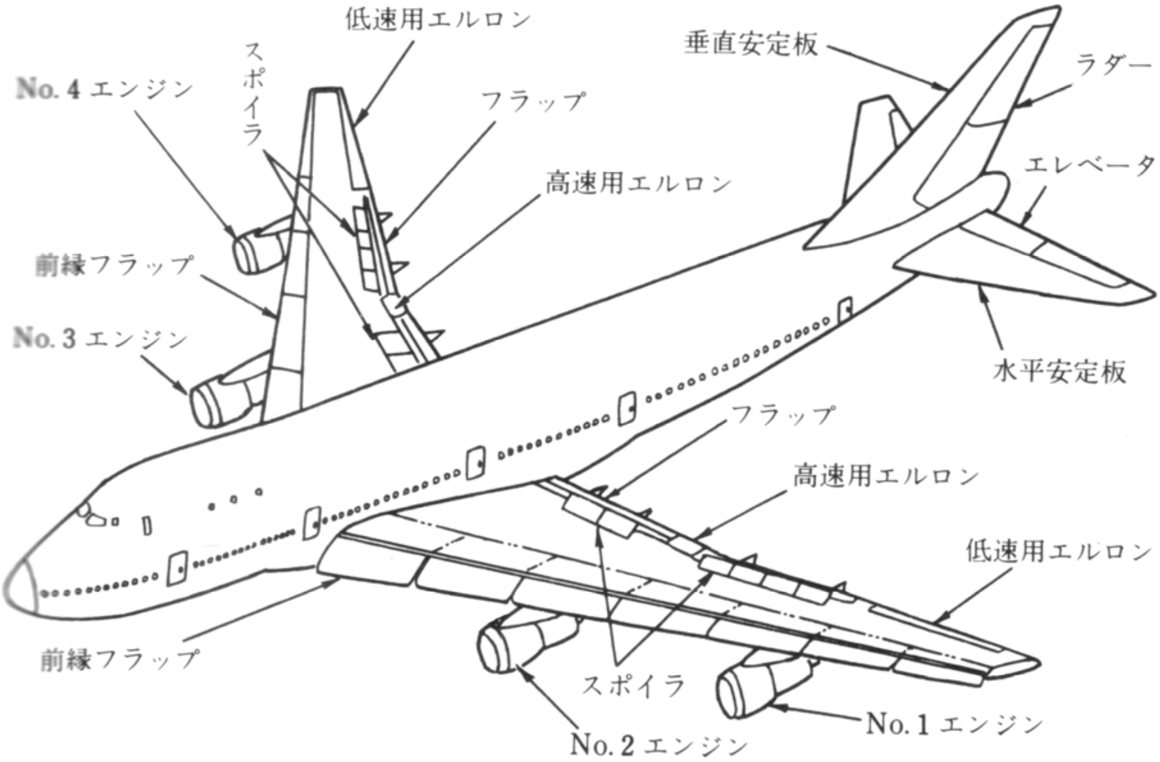

図１　Ｂ７４７各部名称

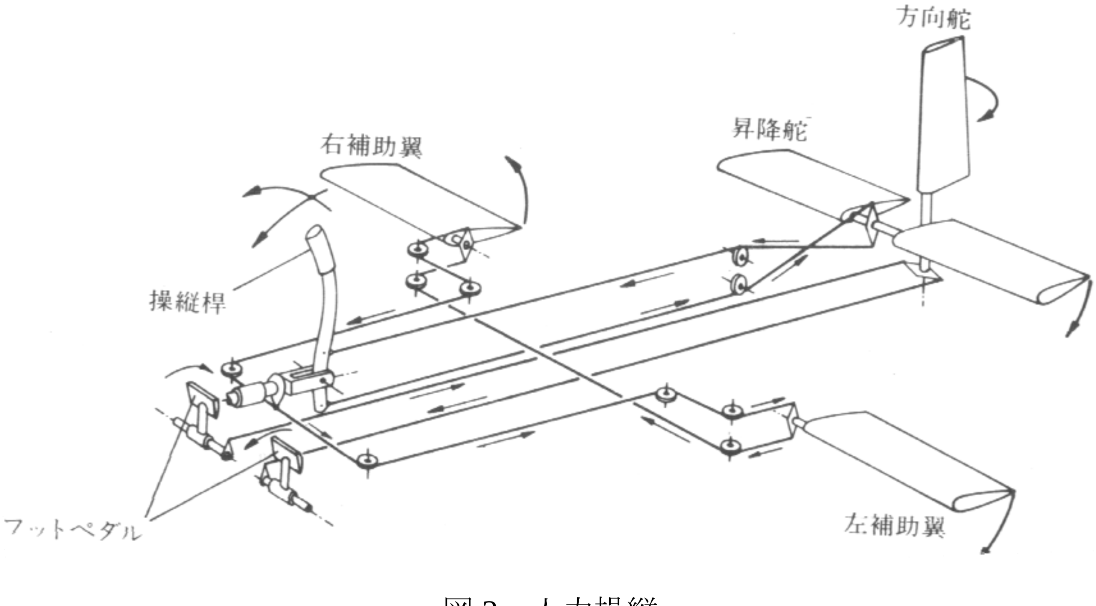

図２　人力操縦

2. 座標系と記号の定義

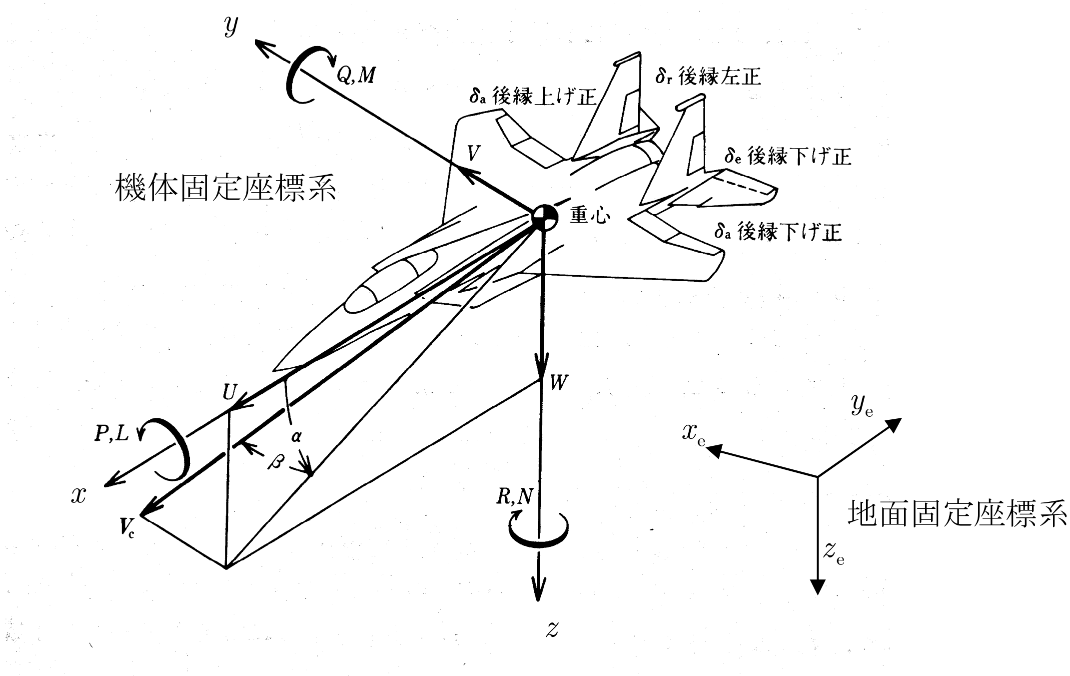

図 3　座標系と記号の定義

重心の速度ベクトル

速度の大きさ

迎角

横滑り角

重心周りの角速度ベクトル

外力（重力，空気力，推力）

重心周りのモーメント（空気力，推力）

舵角　　　　：補助翼（エルロン）

　　　　　　：昇降舵（エレベータ）

　　　　　　：方向舵（ラダー）

推力操作量

3. 運動方程式の導出

仮定１：地球は空間に固定している（地面固定座標系＝慣性座標系）.

２：機体は剛体である.

３：航空機の質量は変化しない.

４：機体は xz 面に関して左右対称である.

3.1 重心の併進運動

Newton の第２法則より

$$\frac{d}{dt}(m\boldsymbol{V}_{\mathrm{C}}) = \boldsymbol{F} \tag{1}$$

m：機体質量

$$\boldsymbol{V}_{\mathrm{C}} = U\boldsymbol{i} + V\boldsymbol{j} + W\boldsymbol{k} \tag{2a}$$

$$\boldsymbol{\omega} = P\boldsymbol{i} + Q\boldsymbol{j} + R\boldsymbol{k} \tag{2b}$$

$$\boldsymbol{F} = X\boldsymbol{i} + Y\boldsymbol{j} + Z\boldsymbol{k} \tag{2c}$$

$\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{k}$：xyz 軸の単位ベクトル

式(1), (2a), (2b)より

$$m\left(\frac{d^{*}\boldsymbol{V}_{\mathrm{C}}}{dt} + \boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{V}_{\mathrm{C}}\right) = \boldsymbol{F} \tag{3}$$

成分ごとに書くと,

$$m(\dot{U} + QW - RV) = X \tag{4a}$$

$$m(\dot{V} + RU - PW) = Y \tag{4b}$$

$$m(\dot{W} + PV - QU) = Z \tag{4c}$$

3.2 重心まわりの回転運動

重心まわりの回転を表す運動方程式

$$\frac{d\boldsymbol{H}_{\mathrm{C}}}{dt} = \boldsymbol{M} \tag{5}$$

$\boldsymbol{H}_{\mathrm{C}}$ ：機体重心まわりの角運動量

$$\boldsymbol{M} = L\boldsymbol{i} + M\boldsymbol{j} + N\boldsymbol{k} \tag{6a}$$

$$\boldsymbol{H}_{\mathrm{C}} = H_x\boldsymbol{i} + H_y\boldsymbol{j} + H_z\boldsymbol{k} \tag{6b}$$

$$\boldsymbol{H}_{\mathrm{C}} = \begin{bmatrix} H_x \\ H_y \\ H_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_x & -I_{xy} & -I_{xz} \\ -I_{yx} & I_y & -I_{yz} \\ -I_{zx} & -I_{zy} & I_z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P \\ Q \\ R \end{bmatrix} = \boldsymbol{I}\boldsymbol{\omega} \tag{7}$$

$\boldsymbol{I}$：慣性テンソル

I_x， I_y， I_z ：慣性モーメント

I_{xy}， I_{xz}， $I_{yx}\cdots$：慣性乗積

式(5)，(2b)，(6b)より

$$\frac{d^*\boldsymbol{H}_{\mathrm{C}}}{dt} + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{H} = \boldsymbol{M} \tag{8}$$

成分ごとに書くと（仮定４に注意），

$$I_x\dot{P} - (I_y - I_z)QR - I_{xz}(\dot{R} + PQ) = L \tag{9a}$$

$$I_y\dot{Q} - (I_z - I_x)RP - I_{xz}(R^2 - P^2) = M \tag{9b}$$

$$I_z\dot{R} - (I_x - I_y)PQ - I_{xz}(\dot{P} - QR) = N \tag{9c}$$

3.3 慣性連成効果（Inertia Coupling）

$I_x \ll I_y$， $I_x \ll I_z$ の航空機（主に超音速機）が登場し問題になった．

(1) ロール・ヨー・カップリング

$(I_z - I_x)RP$ の項により，ロール運動中にヨー運動が加わるとピッチング・モーメントが発生．これが空力的な復元モーメントを超えると不安定化．水平尾翼を大きくする．

(2) ロール・ピッチ・カップリング

$(I_x - I_y)PQ$ の項により，ロール運動中にピッチ運動が加わると，ヨーイング・モーメントが発生．これが空力的な復元モーメントを超えると不安定化．垂直尾翼を大きくする．

3.4 機体固定座標系と慣性テンソル

機体固定座標系として代表的な３つの座標系を定める．

(1) 慣性主軸（principal axes）

$$\boldsymbol{I}_p = \begin{bmatrix} I_{xp} & & 0 \\ & I_{yp} & \\ 0 & & I_{zp} \end{bmatrix} \tag{10}$$

(2) 機体軸（body axes）

$$\boldsymbol{I} = \begin{bmatrix} I_x & 0 & -I_{xz} \\ 0 & I_y & 0 \\ -I_{zx} & 0 & I_z \end{bmatrix} \tag{11}$$

(3) 安定軸（stability axes）

慣性テンソルの形は機体軸と同じ. x 軸を左右対称な定常釣り合い飛行時の速度ベクトル（$\boldsymbol{V}_{\mathrm{C0}}$ とする）に一致させる．

$$\boldsymbol{V}_{\mathrm{C0}} = U_0 \boldsymbol{i} \tag{12a}$$

$$W_0 = V_0 = 0 \tag{12b}$$

機体軸（あるいは安定軸）は慣性主軸を y 軸まわりに角度η回転させると得られるとすると，座標変換行列$\boldsymbol{T}$ を用いて，以下の関係式が成り立つ．

$$\boldsymbol{T} = \begin{bmatrix} \cos\eta & 0 & -\sin\eta \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin\eta & 0 & \cos\eta \end{bmatrix} \tag{13}$$

$$\boldsymbol{I} = \boldsymbol{T}\boldsymbol{I}_p\boldsymbol{T}^{\mathrm{T}} \tag{14}$$

3.5 **オイラー角**

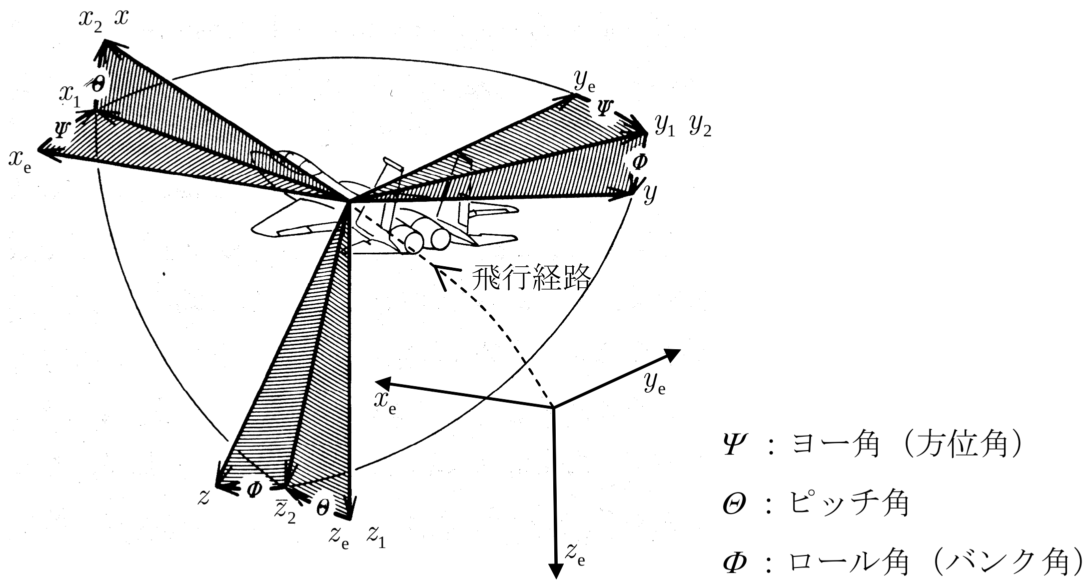

図 4　地面固定座標系とオイラー角

座標変換行列

$$\boldsymbol{F}_1(\Psi)=\begin{bmatrix}\cos\Psi & \sin\Psi & 0\\ -\sin\Psi & \cos\Psi & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{F}_2(\Theta)=\begin{bmatrix}\cos\Theta & 0 & -\sin\Theta\\ 0 & 1 & 0\\ \sin\Theta & 0 & \cos\Theta\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{F}_3(\Phi)=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & \cos\Phi & \sin\Phi\\ 0 & -\sin\Phi & \cos\Phi\end{bmatrix}$$

より，

$$\begin{aligned}\begin{bmatrix}\dot{x}_e\\ \dot{y}_e\\ \dot{z}_e\end{bmatrix}&=\boldsymbol{F}_1(-\Psi)\boldsymbol{F}_2(-\Theta)\boldsymbol{F}_3(-\Phi)\begin{bmatrix}U\\ V\\ W\end{bmatrix}\\ &=\begin{bmatrix}\cos\Theta\cos\Psi & \sin\Phi\sin\Theta\cos\Psi-\cos\Phi\sin\Psi & \cos\Phi\sin\Theta\cos\Psi+\sin\Phi\sin\Psi\\ \cos\Theta\sin\Psi & \sin\Phi\sin\Theta\sin\Psi+\cos\Phi\cos\Psi & \cos\Phi\sin\Theta\sin\Psi-\sin\Phi\cos\Psi\\ -\sin\Theta & \sin\Phi\cos\Theta & \cos\Phi\cos\Theta\end{bmatrix}\begin{bmatrix}U\\ V\\ W\end{bmatrix}\end{aligned}\tag{15}$$

P，Q，R と $\dot{\Phi}$，$\dot{\Theta}$，$\dot{\Psi}$ の関係は以下のようになる．

$$\begin{bmatrix}P\\ Q\\ R\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\dot{\Phi}\\ 0\\ 0\end{bmatrix}+\boldsymbol{F}_3(\Phi)\begin{bmatrix}0\\ \dot{\Theta}\\ 0\end{bmatrix}+\boldsymbol{F}_3(\Phi)\boldsymbol{F}_2(\Theta)\begin{bmatrix}0\\ 0\\ \dot{\Psi}\end{bmatrix}\tag{16}$$

$$\begin{bmatrix} \dot{\Phi} \\ \dot{\Theta} \\ \dot{\Psi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \sin\Phi\tan\Theta & \cos\Phi\tan\Theta \\ 0 & \cos\Phi & -\sin\Phi \\ 0 & \sin\Phi\sec\Theta & \cos\Phi\sec\Theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P \\ Q \\ R \end{bmatrix} \tag{17}$$

3.6 剛体としての航空機の運動方程式

外力 (X, Y, Z) を空気力 $(X_\mathrm{a}, Y_\mathrm{a}, Z_\mathrm{a})$ と重力に分ける.

$$\begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X_\mathrm{a} \\ Y_\mathrm{a} \\ Z_\mathrm{a} \end{bmatrix} + \boldsymbol{F}_3(\Phi)\boldsymbol{F}_2(\Theta)\boldsymbol{F}_1(\Psi) \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ mg \end{bmatrix} \tag{18}$$

まとめると，以下の 12 個の非線形微分方程式によって航空機の挙動は表される.

$$m(\dot{U} + QW - RV) = X_\mathrm{a} - mg\sin\Theta \tag{19a}$$
$$m(\dot{V} + RU - PW) = Y_\mathrm{a} + mg\cos\Theta\sin\Phi \tag{19b}$$
$$m(\dot{W} + PV - QU) = Z_\mathrm{a} + mg\cos\Theta\cos\Phi \tag{19c}$$

$$I_x\dot{P} - (I_y - I_z)QR - I_{xz}(\dot{R} + PQ) = L \tag{20a}$$
$$I_y\dot{Q} - (I_z - I_x)RP - I_{xz}(R^2 - P^2) = M \tag{20b}$$
$$I_z\dot{R} - (I_x - I_y)PQ - I_{xz}(\dot{P} - QR) = N \tag{20c}$$

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_\mathrm{e} \\ \dot{y}_\mathrm{e} \\ \dot{z}_\mathrm{e} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\Theta\cos\Psi & \sin\Phi\sin\Theta\cos\Psi - \cos\Phi\sin\Psi & \cos\Phi\sin\Theta\cos\Psi + \sin\Phi\sin\Psi \\ \cos\Theta\sin\Psi & \sin\Phi\sin\Theta\sin\Psi + \cos\Phi\cos\Psi & \cos\Phi\sin\Theta\sin\Psi - \sin\Phi\cos\Psi \\ -\sin\Theta & \sin\Phi\cos\Theta & \cos\Phi\cos\Theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U \\ V \\ W \end{bmatrix} \tag{21}$$

$$\begin{bmatrix} \dot{\Phi} \\ \dot{\Theta} \\ \dot{\Psi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \sin\Phi\tan\Theta & \cos\Phi\tan\Theta \\ 0 & \cos\Phi & -\sin\Phi \\ 0 & \sin\Phi\sec\Theta & \cos\Phi\sec\Theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P \\ Q \\ R \end{bmatrix} \tag{22}$$

ここで，$\dot{z}_\mathrm{e}$ を沈下率（$-\dot{z}_\mathrm{e}$ を上昇率），以下を経路角という.

$$\Gamma = \tan^{-1}\frac{-\dot{z}_\mathrm{e}}{\sqrt{\dot{x}_\mathrm{e}{}^2 + \dot{y}_\mathrm{e}{}^2}} \tag{23}$$