

航空機の運動方程式

1. 舵面と操縦系統

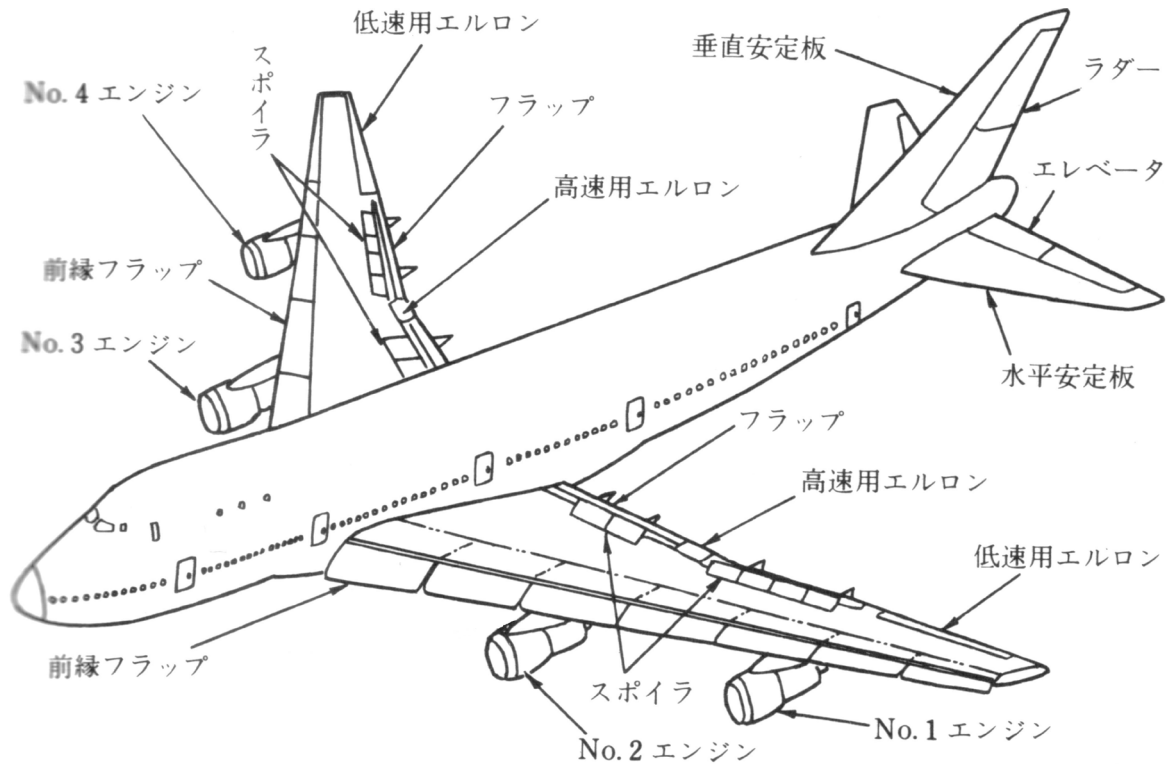


図1 B747各部名称

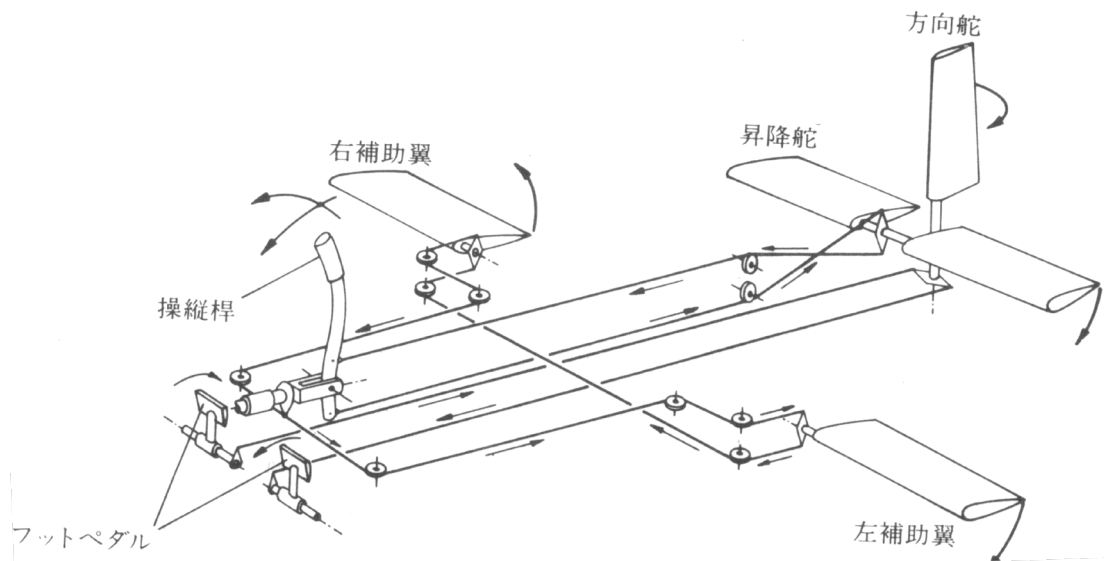


図2 人力操縦

2. 座標系と記号の定義

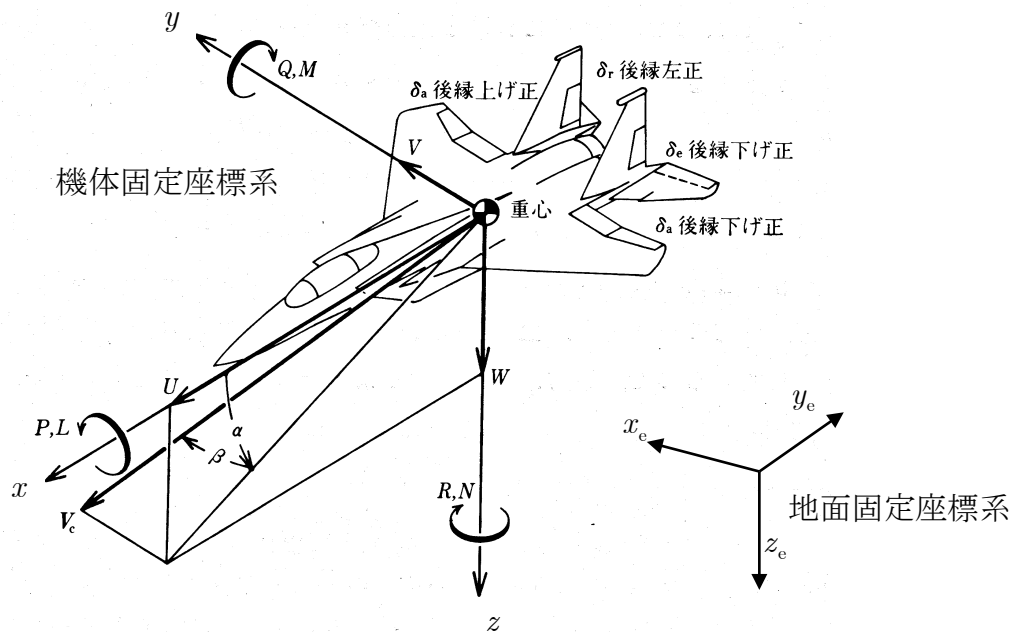


図3 座標系と記号の定義

重心の速度ベクトル

外力 (重力, 空気力, 推力)

速度の大きさ

重心周りのモーメント (空気力, 推力)

迎角

横滑り角

舵角 : 補助翼 (エルロン)
: 昇降舵 (エレベータ)
: 方向舵 (ラダー)

重心周りの角速度ベクトル

推力操作量

3. 運動方程式の導出

仮定 1 : 地球は空間に固定している (地面固定座標系 = 慣性座標系) .

2 : 機体は剛体である.

3 : 航空機の質量は変化しない.

4 : 機体は xz 面に関して左右対称である.

3.1 重心の併進運動

Newton の第 2 法則より

$$\frac{d}{dt}(m \mathbf{V}_C) = \mathbf{F} \quad (1)$$

m : 機体質量

$$\mathbf{V}_C = U\mathbf{i} + V\mathbf{j} + W\mathbf{k} \quad (2a)$$

$$\boldsymbol{\omega} = P\mathbf{i} + Q\mathbf{j} + R\mathbf{k} \quad (2b)$$

$$\mathbf{F} = X\mathbf{i} + Y\mathbf{j} + Z\mathbf{k} \quad (2c)$$

$\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$: xyz 軸の単位ベクトル

式(1), (2a), (2b)より

$$m \left(\frac{d^* \mathbf{V}_C}{dt} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{V}_C \right) = \mathbf{F} \quad (3)$$

成分ごとに書くと,

$$m(\dot{U} + QW - RV) = X \quad (4a)$$

$$m(\dot{V} + RU - PW) = Y \quad (4b)$$

$$m(\dot{W} + PV - QU) = Z \quad (4c)$$

3.2 重心まわりの回転運動

重心まわりの回転を表す運動方程式

$$\frac{d\mathbf{H}_C}{dt} = \mathbf{M} \quad (5)$$

\mathbf{H}_C : 機体重心まわりの角運動量

$$\mathbf{M} = L\mathbf{i} + M\mathbf{j} + N\mathbf{k} \quad (6a)$$

$$\mathbf{H}_C = H_x\mathbf{i} + H_y\mathbf{j} + H_z\mathbf{k} \quad (6b)$$

$$\mathbf{H}_C = \begin{bmatrix} H_x \\ H_y \\ H_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_x & -I_{xy} & -I_{xz} \\ -I_{yx} & I_y & -I_{yz} \\ -I_{zx} & -I_{zy} & I_z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P \\ Q \\ R \end{bmatrix} = \mathbf{I}\boldsymbol{\omega} \quad (7)$$

\mathbf{I} : 慣性テンソル

I_x, I_y, I_z : 慣性モーメント

$I_{xy}, I_{xz}, I_{yx} \dots$: 慣性乗積

式(5), (2b), (6b)より

$$\frac{d^*\mathbf{H}_C}{dt} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{H}_C = \mathbf{M} \quad (8)$$

成分ごとに書くと (仮定 4 に注意) ,

$$I_x \dot{P} - (I_y - I_z)QR - I_{xz}(\dot{R} + PQ) = L \quad (9a)$$

$$I_y \dot{Q} - (I_z - I_x)RP - I_{xz}(R^2 - P^2) = M \quad (9b)$$

$$I_z \dot{R} - (I_x - I_y)PQ - I_{xz}(\dot{P} - QR) = N \quad (9c)$$

3.3 慣性連成効果 (Inertia Coupling)

$I_x \ll I_y, I_x \ll I_z$ の航空機 (主に超音速機) が登場し問題になった.

(1) ロール・ヨー・カップリング

$(I_z - I_x)RP$ の項により, ロール運動中にヨー運動が加わるとピッチング・モーメントが発生. これが空力的な復元モーメントを超えると不安定化. 水平尾翼を大きくする.

(2) ロール・ピッチ・カップリング

$(I_x - I_y)PQ$ の項により，ロール運動中にピッチ運動が加わると，ヨーイング・モーメントが発生．これが空力的な復元モーメントを超えると不安定化．垂直尾翼を大きくする．

3.4 機体固定座標系と慣性テンソル

機体固定座標系として代表的な 3 つの座標系を定める．

(1) 慣性主軸 (principal axes)

$$\mathbf{I}_p = \begin{bmatrix} I_{xp} & 0 \\ 0 & I_{yp} \\ 0 & 0 & I_{zp} \end{bmatrix} \quad (10)$$

(2) 機体軸 (body axes)

$$\mathbf{I} = \begin{bmatrix} I_x & 0 & -I_{xz} \\ 0 & I_y & 0 \\ -I_{zx} & 0 & I_z \end{bmatrix} \quad (11)$$

(3) 安定軸 (stability axes)

慣性テンソルの形は機体軸と同じ． x 軸を左右対称な定常釣り合い飛行時の速度ベクトル (\mathbf{V}_{c0} とする) に一致させる．

$$\mathbf{V}_{c0} = U_0 \mathbf{i} \quad (12a)$$

$$W_0 = V_0 = 0 \quad (12b)$$

機体軸 (あるいは安定軸) は慣性主軸を y 軸まわりに角度 η 回転させると得られるとすると，座標変換行列 \mathbf{T} を用いて，以下の関係式が成り立つ．

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} \cos \eta & 0 & -\sin \eta \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin \eta & 0 & \cos \eta \end{bmatrix} \quad (13)$$

$$\mathbf{I} = \mathbf{T} \mathbf{I}_p \mathbf{T}^T \quad (14)$$

3.5 オイラー角

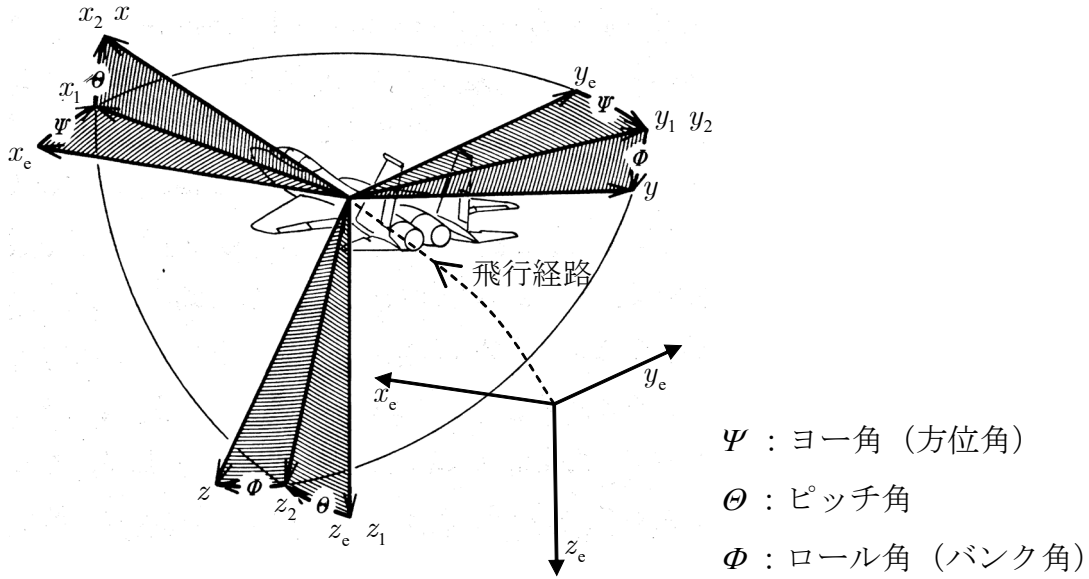


図4 地面固定座標系とオイラー角

座標変換行列

$$F_1(\Psi) = \begin{bmatrix} \cos \Psi & \sin \Psi & 0 \\ -\sin \Psi & \cos \Psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad F_2(\Theta) = \begin{bmatrix} \cos \Theta & 0 & -\sin \Theta \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin \Theta & 0 & \cos \Theta \end{bmatrix}, \quad F_3(\Phi) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \Phi & \sin \Phi \\ 0 & -\sin \Phi & \cos \Phi \end{bmatrix}$$

より,

$$\begin{aligned}
 \begin{bmatrix} \dot{x}_e \\ \dot{y}_e \\ \dot{z}_e \end{bmatrix} &= F_1(-\Psi) F_2(-\Theta) F_3(-\Phi) \begin{bmatrix} U \\ V \\ W \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} \cos \Theta \cos \Psi & \sin \Phi \sin \Theta \cos \Psi - \cos \Phi \sin \Psi & \cos \Phi \sin \Theta \cos \Psi + \sin \Phi \sin \Psi \\ \cos \Theta \sin \Psi & \sin \Phi \sin \Theta \sin \Psi + \cos \Phi \cos \Psi & \cos \Phi \sin \Theta \sin \Psi - \sin \Phi \cos \Psi \\ -\sin \Theta & \sin \Phi \cos \Theta & \cos \Phi \cos \Theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U \\ V \\ W \end{bmatrix} \quad (15)
 \end{aligned}$$

P, Q, R と $\dot{\Phi}, \dot{\Theta}, \dot{\Psi}$ の関係は以下のようなになる.

$$\begin{bmatrix} P \\ Q \\ R \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{\Phi} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + F_3(\Phi) \begin{bmatrix} 0 \\ \dot{\Theta} \\ 0 \end{bmatrix} + F_3(\Phi) F_2(\Theta) \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\Psi} \end{bmatrix} \quad (16)$$

$$\begin{bmatrix} \dot{\Phi} \\ \dot{\Theta} \\ \dot{\Psi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \sin \Phi \tan \Theta & \cos \Phi \tan \Theta \\ 0 & \cos \Phi & -\sin \Phi \\ 0 & \sin \Phi \sec \Theta & \cos \Phi \sec \Theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P \\ Q \\ R \end{bmatrix} \quad (17)$$

3.6 剛体としての航空機の運動方程式

外力(X, Y, Z)を空気力(X_a, Y_a, Z_a)と重力に分ける.

$$\begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X_a \\ Y_a \\ Z_a \end{bmatrix} + \mathbf{F}_3(\Phi) \mathbf{F}_2(\Theta) \mathbf{F}_1(\Psi) \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ mg \end{bmatrix} \quad (18)$$

まとめると, 以下の 12 個の非線形微分方程式によって航空機の挙動は表される.

$$m(\dot{U} + QW - RV) = X_a - mg \sin \Theta \quad (19a)$$

$$m(\dot{V} + RU - PW) = Y_a + mg \cos \Theta \sin \Phi \quad (19b)$$

$$m(\dot{W} + PV - QU) = Z_a + mg \cos \Theta \cos \Phi \quad (19c)$$

$$I_x \dot{P} - (I_y - I_z)QR - I_{xz}(\dot{R} + PQ) = L \quad (20a)$$

$$I_y \dot{Q} - (I_z - I_x)RP - I_{xz}(R^2 - P^2) = M \quad (20b)$$

$$I_z \dot{R} - (I_x - I_y)PQ - I_{xz}(\dot{P} - QR) = N \quad (20c)$$

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_e \\ \dot{y}_e \\ \dot{z}_e \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \Theta \cos \Psi & \sin \Phi \sin \Theta \cos \Psi - \cos \Phi \sin \Psi & \cos \Phi \sin \Theta \cos \Psi + \sin \Phi \sin \Psi \\ \cos \Theta \sin \Psi & \sin \Phi \sin \Theta \sin \Psi + \cos \Phi \cos \Psi & \cos \Phi \sin \Theta \sin \Psi - \sin \Phi \cos \Psi \\ -\sin \Theta & \sin \Phi \cos \Theta & \cos \Phi \cos \Theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U \\ V \\ W \end{bmatrix} \quad (21)$$

$$\begin{bmatrix} \dot{\Phi} \\ \dot{\Theta} \\ \dot{\Psi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \sin \Phi \tan \Theta & \cos \Phi \tan \Theta \\ 0 & \cos \Phi & -\sin \Phi \\ 0 & \sin \Phi \sec \Theta & \cos \Phi \sec \Theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P \\ Q \\ R \end{bmatrix} \quad (22)$$

ここで, z_e を沈下率 ($-z_e$ を上昇率), 以下を経路角という.

$$\Gamma = \tan^{-1} \frac{-\dot{z}_e}{\sqrt{\dot{x}_e^2 + \dot{y}_e^2}} \quad (23)$$