

サーボ系

状態フィードバック制御の目的は $\mathbf{0}$ からずれた状態ベクトルを再び $\mathbf{0}$ に戻すことであった。これをレギュレータとよぶ。一方，変化する目標値に出力を追従させるフィードバック制御系をサーボ系とよぶ。サーボ系は，元来，物体の位置，方位，姿勢，力などの力学量を目標値の任意の変化に追従するように構成された制御系であったが，追従制御を主な目的として構成された制御系一般を指すようになってきた。

1. 積分器の役割と内部モデル原理（復習）

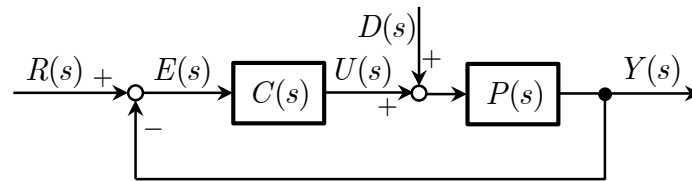


図1 外乱を含むシステムに対するフィードバック制御系

外乱 $D(s)$ ，目標値 $R(s)$ と偏差 $E(s)$ ($= R(s) - Y(s)$) の間には以下の関係がある。

$$E(s) = \frac{1}{1 + P(s)C(s)} R(s) - \frac{P(s)}{1 + P(s)C(s)} D(s) \quad (1)$$

ここで，外乱が存在せず ($D(s) = 0$)，目標値として単位ステップ信号 $R(s) = 1/s$ が与えられたときの定常偏差は，

$$e(\infty) = \lim_{s \rightarrow 0} s \cdot \frac{1}{1 + P(s)C(s)} \cdot \frac{1}{s} = \frac{1}{1 + \lim_{s \rightarrow 0} P(s)C(s)} \quad (2)$$

となる。ゆえに，定常偏差が残らないためには，一巡伝達関数 $P(s)C(s)$ が積分要素 $1/s$ をもつ（原点に極をもつ）必要がある。一方，目標値 $R(s) = 0$ ではあるが，単位ステップ信号の定値外乱 $D(s) = 1/s$ が与えられたときの定常偏差は以下のようになる。

$$e(\infty) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{P(s)}{1 + P(s)C(s)} \quad (3)$$

ゆえに，定常偏差が生じないためには，制御器 $C(s)$ が積分要素 $1/s$ をもつ必要がある。

一般に，制御器に積分要素を加えていくと外乱抑制が可能となり，また急な目標値の変化にも追従できるようになる。目標値の特性と同じ特性を持つモデルが制御器に含まれて

いると、定常偏差をゼロにすることができる。これを**内部モデル原理**という。

2. サーボ系の構成

2.1 偏差の存在

外乱 $\mathbf{d}(t) \in R^n$ が加わった n 次元 m 入力 r 出力線形システム

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u} + \mathbf{d} \\ \mathbf{y} = \mathbf{C}\mathbf{x} \end{cases} \quad (4)$$

に対して、目標値 $\mathbf{r}(t)$ と出力 $\mathbf{y}(t)$ の誤差 $\mathbf{e}(t)$

$$\mathbf{e}(t) = \mathbf{r}(t) - \mathbf{y}(t) \quad (5)$$

を考え、次のような状態フィードバック制御を行う。

$$\mathbf{u}(t) = -\mathbf{F}\mathbf{x}(t) + \mathbf{K}\mathbf{e}(t) \quad (6)$$

閉ループ系は

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{A}\mathbf{x} - \mathbf{B}\mathbf{F}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{K}(\mathbf{r} - \mathbf{C}\mathbf{x}) + \mathbf{d} \\ &= (\mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{F} - \mathbf{B}\mathbf{K}\mathbf{C})\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{K}\mathbf{r} + \mathbf{d} \end{aligned} \quad (7)$$

ここで、フィードバックゲイン $\mathbf{K}$ は閉ループ系を漸近安定させるように選ばれているとする。外乱が存在しない環境 ($\mathbf{d} = \mathbf{0}$) で、目標値 $\mathbf{r}(t)$ がステップ状に一定値 $\mathbf{r}_0$ に変化するとき、状態ベクトルの定常値 $\mathbf{x}(\infty)$ は、

$$\mathbf{x}(\infty) = (\mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{F} - \mathbf{B}\mathbf{K}\mathbf{C})^{-1} \mathbf{B}\mathbf{K}\mathbf{r}_0 \quad (8)$$

よって、出力 $\mathbf{y}(t)$ の定常値 $\mathbf{y}(\infty)$ は

$$\mathbf{y}(\infty) = \mathbf{C}(\mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{F} - \mathbf{B}\mathbf{K}\mathbf{C})^{-1} \mathbf{B}\mathbf{K}\mathbf{r}_0 \quad (9)$$

ここから、フィードバックゲイン $\mathbf{K}$ の値が非常に大きい場合、出力は目標値とほぼ一致するが、そうでない場合は出力は目標値に追従できず、定常偏差が残る。同様に、外乱が加わると偏差が生じる。

2.2 積分器の追加

積分器を前置補償として加える.

$$\mathbf{u}(t) = -\mathbf{F}\mathbf{x}(t) + \mathbf{K} \int \mathbf{e}(t) dt \quad (10)$$

これは以下と同値である.

$$\mathbf{u}(t) = -\mathbf{F}\mathbf{x}(t) + \mathbf{K}\mathbf{z}(t) \quad (11)$$

$$\dot{\mathbf{z}}(t) = \mathbf{e}(t) = \mathbf{r}(t) - \mathbf{y}(t) \quad (12)$$

この場合, 閉ループ系は

$$\begin{bmatrix} \dot{\mathbf{x}} \\ \dot{\mathbf{z}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A} - \mathbf{BF} & \mathbf{BK} \\ -\mathbf{C} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{z} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{d} \\ \mathbf{r} \end{bmatrix} \quad (13)$$

となる. 外乱 $\mathbf{d}(t)$ と目標値 $\mathbf{r}(t)$ がステップ状に一定値 $\mathbf{d}_0$ と $\mathbf{r}_0$ にそれぞれ変化するとき, 定常値 $\mathbf{x}(\infty)$ と $\mathbf{z}(\infty)$ は

$$\begin{bmatrix} \mathbf{x}(\infty) \\ \mathbf{z}(\infty) \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} \mathbf{A} - \mathbf{BF} & \mathbf{BK} \\ -\mathbf{C} & \mathbf{0} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \mathbf{d}_0 \\ \mathbf{r}_0 \end{bmatrix} \quad (14)$$

となる. ところで,

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & -\mathbf{I}_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{A} - \mathbf{BF} & \mathbf{BK} \\ -\mathbf{C} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad (15)$$

が成り立つことから, 式(14), (15)より,

$$\mathbf{y}(\infty) = \mathbf{C}\mathbf{x}(\infty) = \mathbf{r}_0 \quad (16)$$

となり, 出力の定常値には外乱の成分は現れず, 目標値と一致するようになる.

2.3 拡大系によるゲインの設計

次のような状態ベクトルを $\begin{bmatrix} \mathbf{x}^T & \mathbf{z}^T \end{bmatrix}^T$ とするシステムを**拡大系** (**拡大システム**) と呼ぶ.

$$\begin{bmatrix} \dot{\mathbf{x}} \\ \dot{\mathbf{z}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{0} \\ -\mathbf{C} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{z} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{B} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \mathbf{u} + \begin{bmatrix} \mathbf{d} \\ \mathbf{r} \end{bmatrix} \quad (17)$$

誤差積分を含む状態フィードバック（式(10)）は，拡大系に状態フィードバック

$$\mathbf{u} = -\begin{bmatrix} \mathbf{F} & -\mathbf{K} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{z} \end{bmatrix} \quad (18)$$

を適用することに等しい．よって，この拡大系が可制御であるならば，閉ループ系を安定とするフィードバックゲイン $\mathbf{F}$ ， $\mathbf{K}$ を求めることができる．

$$\bar{\mathbf{A}} := \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{0} \\ -\mathbf{C} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \in R^{(n+m) \times (n+m)}, \quad \bar{\mathbf{B}} := \begin{bmatrix} \mathbf{B} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \in R^{(n+m) \times m} \quad (19)$$

とすると，拡大系の可制御行列 $\bar{\mathbf{M}}_c$ は

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{M}}_c &= \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{B}} & \bar{\mathbf{A}}\bar{\mathbf{B}} & \bar{\mathbf{A}}^2\bar{\mathbf{B}} & \cdots & \bar{\mathbf{A}}^{n+m-1}\bar{\mathbf{B}} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \mathbf{B} & \mathbf{A}\mathbf{B} & \mathbf{A}^2\mathbf{B} & \cdots & \mathbf{A}^{n+m-1}\mathbf{B} \\ \mathbf{0} & -\mathbf{C}\mathbf{B} & -\mathbf{C}\mathbf{A}\mathbf{B} & \cdots & -\mathbf{C}\mathbf{A}^{n+m-2}\mathbf{B} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ -\mathbf{C} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{B} & \mathbf{A}\mathbf{B} & \cdots & \mathbf{A}^{n+m-2}\mathbf{B} \\ \mathbf{I}_m & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (20)$$

であるから，拡大系が可制御である $\text{rank } \bar{\mathbf{M}}_c = n + m$ となるための条件は，もとのシステム（式(4)）が可制御であり，かつ

$$\text{rank} \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ -\mathbf{C} & \mathbf{0} \end{bmatrix} = n + m \quad (21)$$

である．この条件が成り立つとき，拡大系に極配置法などを適用することによって，フィードバックゲイン $\mathbf{F}$ ， $\mathbf{K}$ を求めることができる．